

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



VŨ THỊ NĂM

MỘT SỐ BÀI TOÁN
VỀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



VŨ THỊ NĂM

**MỘT SỐ BÀI TOÁN
VỀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC**

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. Nguyễn Việt Hải

THÁI NGUYÊN - 2018

Danh mục hình

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Bài toán Feuerbach | 6 |
| 1.2 | Dựng đường tròn Thebault | 7 |
| 1.3 | Định lý Thebault | 8 |
| 1.4 | Bổ sung tính chất của tâm I | 9 |
| 1.5 | Bài toán cơ bản | 10 |
| 1.6 | a) PQ đi qua I ; b) PQ đi qua I_C | 11 |
| 1.7 | c) PQ đi qua I_A ; d) PQ đi qua I_B | 12 |
| 1.8 | Các trường hợp của định lý Thebault | 13 |
| 1.9 | Từ bài toán Thebault đến định lý Feuerbach | 14 |
| 1.10 | Mệnh đề 1.3 | 16 |
| 1.11 | Định lý Feuerbach đối với đường tròn bàng tiếp | 17 |
| 1.12 | IMO 2012 | 18 |
| 2.1 | Bài toán Malfatti | 20 |
| 2.2 | Tổng diện tích các hình tròn Malfatti không phải là lớn nhất | 21 |
| 2.3 | Nghiệm của bài toán Malfatti gốc | 24 |
| 2.4 | Lời giải đại số | 25 |
| 2.5 | Lời giải đại số-hình học của Schellbach | 26 |
| 2.6 | Khi $R = \frac{1}{2}$; $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$, $c = \sin \gamma$ | 28 |
| 2.7 | Phép dựng phụ 1 và phép dựng phụ 2 | 29 |
| 2.8 | Phép dựng bằng phần mềm GeoGebra, năm 2013 | 30 |
| 2.9 | Bài toán A | 32 |
| 2.10 | Bài toán B | 33 |
| 3.1 | arbelos - hình "con dao thợ đóng giày" | 39 |
| 3.2 | Đường tròn nội tiếp arbelos | 41 |
| 3.3 | Định lý Bankoff thứ nhất | 42 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.4 | Ba cách dựng đường tròn nội tiếp arbelos ABC | 43 |
| 3.5 | Cách dựng thứ tư của đường tròn nội tiếp | 45 |
| 3.6 | Cặp đường tròn Archimedes thứ nhất và thứ hai | 46 |
| 3.7 | Định lý Bankoff thứ hai | 47 |
| 3.8 | Cặp đường tròn Archimedes thứ ba và thứ tư | 48 |
| 3.9 | Cặp đường tròn Archimedes thứ năm và thứ sáu | 49 |
| 3.10 | Cặp đường tròn thứ bảy, thứ tám | 50 |
| 3.11 | Cặp đường tròn thứ chín và cặp thứ mười | 51 |
| 3.12 | Cặp thứ mười một và cặp thứ mười hai | 52 |

Mục lục

| | |
|---|-----------|
| Lời cảm ơn | vi |
| Mở đầu | 1 |
| 1 Từ bài toán Thebault đến bài toán Feuerbach | 4 |
| 1.1 Giới thiệu về hai bài toán: bài toán Thebault và bài toán Feuerbach | 4 |
| 1.1.1 Bài toán Feuerbach | 4 |
| 1.1.2 Bài toán Thebault | 7 |
| 1.2 Bài toán cơ bản | 9 |
| 1.2.1 Áp dụng bài toán cơ bản chứng minh định lý Thebault | 12 |
| 1.2.2 Từ định lý Thebault đến định lý Feuerbach | 14 |
| 1.3 Áp dụng | 17 |
| 2 Bài toán Malfatti | 20 |
| 2.1 Giới thiệu bài toán Malfatti | 20 |
| 2.2 Lời giải bài toán Malfatti gốc | 22 |
| 2.3 Lời giải bài toán Malfatti | 24 |
| 2.3.1 Cách dựng đại số | 24 |
| 2.3.2 Cách dựng đại số-hình học của Schellbach | 26 |
| 2.4 Một số bài toán kiểu Malfatti gốc | 31 |
| 2.4.1 Hai bài toán Malfatti đối ngẫu | 31 |
| 2.4.2 Bài toán Malfatti cho tam giác đều và hình vuông . | 34 |
| 2.4.3 Bài toán Malfatti cho đường tròn | 37 |
| 3 Đường tròn tiếp xúc trong hình học arbelos | 38 |
| 3.1 Một số bài toán đơn giản | 38 |

| | | |
|---------------------------|--|-----------|
| 3.2 | Đường tròn nội tiếp trong arbelos | 40 |
| 3.2.1 | Tính chất của đường tròn nội tiếp trong Arbelos | 40 |
| 3.2.2 | Cách dựng đường tròn nội tiếp arbelos ABC | 44 |
| 3.3 | Các cặp đường tròn Archimedes trong arbelos | 45 |
| 3.3.1 | Cặp đường tròn Archimedes thứ nhất và thứ hai | 45 |
| 3.3.2 | Cặp đường tròn Archimedes thứ ba và thứ tư | 48 |
| 3.3.3 | Các cặp đường tròn Archimedes thứ năm và thứ sáu | 49 |
| 3.3.4 | Các cặp đường tròn Archimedes thứ bảy và thứ tám | 50 |
| Tài liệu tham khảo | | 54 |

Bảng ký hiệu

| stt | Ký hiệu | Nội dung ký hiệu | |
|-----|----------------------|---|----|
| 1 | O_9 | Tâm đường tròn Euler | 5 |
| 2 | ρ_a | Bán kính đường tròn bàng tiếp trong \widehat{A} | 6 |
| 3 | (ABC) | Đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C | 11 |
| 4 | (O) | Đường tròn tâm O | 17 |
| 5 | (O_A, r_A) | Tâm, bán kính đường tròn Malfatti trong \widehat{A} | 24 |
| 6 | $[ABC]$ | Hình arbelos | 22 |
| 7 | (PQ) | Nửa đường tròn đường kính PQ | 38 |
| 8 | $O(r)$ | Đường tròn tâm O , bán kính r | 38 |
| 9 | $t = \frac{ab}{a+b}$ | Bán kính đường tròn Archimedes | 45 |
| 10 | $(W_k), (W'_k)$ | Cặp đường tròn Archimedes | 46 |
| 11 | (CXY) | Đường tròn Bankoff trong hình arbelos | 47 |

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường Đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K10B (2016 - 2018) Trường Đại học khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 10 năm 2018
Người viết Luận văn

Vũ Thị Năm

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Các bài toán về đường tròn luôn là những bài toán được các nhà toán học quan tâm. Nhiều bài toán về sự tiếp xúc của các đường tròn đã gắn liền với tên tuổi của các nhà toán học như bài toán Thebault, bài toán Feuerbach, bài toán Malfatti, các bài toán về đường tròn trong hình học arbelos ("hình con dao của thợ đóng giày") ... Sự dẫn dắt từ bài toán này sang bài toán khác cùng các ứng dụng của chúng đã mang lại nhiều kết quả tuyệt vời của hình học Euclide. Để hiểu biết thêm về các đường tròn tiếp xúc, khai thác các tính chất, cách xác định chúng, áp dụng được vào các bài toán khác, tôi đã chọn đề tài "Một số bài toán về đường tròn tiếp xúc". Mục đích của đề tài là:

- Tìm hiểu các bài toán liên quan đến các đường tròn tiếp xúc: bài toán Thebault, bài toán Feuerbach, bài toán Malfatti, các bài toán về đường tròn tiếp xúc trong hình học arbelos .

- Trình bày mỗi bài toán với những nội dung được cập nhật, theo trình tự: xuất xứ của bài toán, cách giải quyết mới của bài toán và các bài toán liên quan.

- Các kết luận khoa học rút ra từ các bài toán và áp dụng để giải toán học sinh giỏi ở phổ thông.

- Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo học sinh học giỏi môn Hình học.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Trình bày một cách hệ thống các bài toán nói trên, áp dụng được các tính chất của đường tròn tiếp xúc vào các bài toán khác. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

Chương 1. Từ bài toán Thebault đến bài toán Feuerbach

Xét hai bài toán : bài toán Thebault, bài toán Feuerbach và mối liên hệ giữa chúng. Bài toán Feuerbach là một trong những bài toán đẹp đẽ nhất của hình học phẳng Euclide trải qua nhiều năm tháng với nhiều cách chứng minh. Chương này bao gồm:

- 1.1. Giới thiệu về hai bài toán: bài toán Thebault và bài toán Feuerbach
- 1.2. Bài toán cơ bản
- 1.3. Áp dụng.

Chương 2. Bài toán Malfatti

Giới thiệu bài toán Malfatti và bài toán Malfatti gốc. Trình bày chi tiết lời giải bài toán toán Malfatti cho tam giác bất kỳ, giải thích đầy đủ tại sao các đường tròn Malfatti không là nghiệm của bài toán Malfattigốc và đâu là nghiệm đúng của bài toán đó. Chương này bao gồm các mục sau:

- 2.1. Giới thiệu bài toán Malfatti
- 2.2. Lời giải của bài toán Malfatti gốc
- 2.3. Lời giải bài toán Malfatti
- 2.4. Một số bài toán kiểu Malfatti gốc.

Chương 3. Đường tròn tiếp xúc trong hình học arbelos

Hình học arbelos nghiên cứu các nửa đường tròn tiếp xúc, chữ "arbelos" được ghép từ 7 chữ cái $\alpha, \rho, \beta, \eta, \lambda, \theta, \varsigma$ thành $(\alpha\rho\beta\eta\lambda\theta\varsigma)$. Hình arbelos là ba nửa đường tròn với các đường kính trên một đường thẳng. Theo quan điểm trực quan, người ta gọi arbelos là "hình con dao của thợ đóng giày".